Devoir Libre Analyse 2

Zarkti ZAKARIA

Problème 1

1. Soit p un entier ≥ 1 fixé, Déterminer l'ensemble des valeurs pour les quelles les séries suivantes convergent simplement:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n^p}}{n^p} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^p-1}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n^p}}{n^p}$$

$$On\ a : \lim_{+\infty} \left| \frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)} \right| = \lim_{+\infty} \left| \frac{n^p}{(n+1)^p} . \frac{x^{(n+1)^p}}{x^{n^p}} \right| \quad (x \neq 0)$$

$$\lim_{+\infty} \left| \frac{n^p}{(n+1)^p} \right| . \left| e^{ln(x).((n+1)^p - n^p)} \right| = \lim_{+\infty} \left| \frac{n^p}{(n+1)^p} \right| . \left| e^{ln(x).((n+1)^{(p-1)} + (n+1)^{(p-2)}.n + ... + n^{(p-1)})} \right|$$

- Si $0 < |x| < 1 : \lim_{+\infty} = 1.e^{-\infty} = 0$ → selon la reg. d'Alembert la série converge.
- Si $|x| > 1 : \lim_{+\infty} = 1.e^{+\infty} = +\infty$ → selon la reg. d'Alembert la série diverge.
- Si $x = 0 : \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n^p}}{n^p}$ = 0 converge.
- Si $x = 1 : \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ est une série de Riemann: si p > 1, la série converge, si p=1 la série diverge.
- si $x = -1 : \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n^p}}{n^p}$ est une série alternée et puisque $\frac{1}{n^p}(avec\ p \geq 1)$ est décroissante, et $\lim_{+\infty} \frac{1}{n^p} = 0$, la série converge.
  $\Longrightarrow$ La série converge sur [-1,1] (et p $\neq$ 0), et sur [-1,1[(et p = 0)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^p-1}$$

$$On\ a : \lim_{+\infty} \left| \frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)} \right| = \lim_{+\infty} \left| \frac{x^{(n+1)^p-1}}{x^{n^p-1}} \right| \quad (x \neq 0)$$

$$\lim_{+\infty} \left| e^{ln(x).((n+1)^p - n^p)} \right| = \lim_{+\infty} \left| e^{ln(x).((n+1)^{(p-1)} + (n+1)^{(p-2)}.n + ... + n^{(p-1)})} \right|$$

- Si $0 < |x| < 1 : \lim_{+\infty} = e^{-\infty} = 0$ → selon la reg. d'Alembert la série converge.
- Si $|x| > 1 : \lim_{+\infty} = e^{+\infty} = +\infty$ → selon la reg. d'Alembert la série diverge.

- Si $x = 0$: $\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^{p-1}} = 0$ converge.
- Si $x = 1$: $\sum_{n=1}^{+\infty} 1^{n^{p-1}}$ est divergente ($série\ géométrique\ avec\ x = 1$)
- Si $x = -1$: $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n^{p-1}}$ est divergente ($série\ géométrique\ avec\ x = -1$)

  $\Longrightarrow$ La série converge sur]-1,1[

2. Pour p = 1, calculer les sommes de ces séries.

$$Sur\ ]-1,1[\ on\,a : \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$Donc\ \forall x \in\ ]-1,1[: \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x t^{n-1} dt = \int_0^x (\sum_{n=1}^{+\infty} t^{n-1}) dt$$

$$= \int_0^x (\sum_{n=0}^{+\infty} t^n) dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = \boxed{-ln(1-x)}$$

$$Sur\ ]-1,1[\ on\,a : \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \boxed{\frac{1}{1-x}}\ (série\ géométrique)$$

3. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ n'est pas uniformement convergente sur [0,1]:

On a pour $x = 1 \rightarrow \lim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ alors la série ne converge pas uniformément sur [0,1]

4. Pour chaque x $\in$ [0,1], montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t} dt$ converge, on notera g(x) sa valeur.

On utilisant la therome de l'equivalence entre integrale et serie on peut deduire qu'ils sont de la meme nature.

Puisque la fonction $\frac{x^t}{t}$ est décriossante et continue sur $[1, +\infty[$ les conditions de th sont vérifiés.
La série est convergente , donc l'intégrale converge .

5. Montrer que $\forall \alpha \in$ [0,1], g est dérivable sur]0,α[

J'ai pas arrivé à résoudre la question.

6. En déduire que g est dérivable sur]0,1[et calculer sa dérivée

On replace α par 1 ($\in [0,1]$), alors selon -5- g est dérivable sur]0,1[

et on a : $g^{'}(x) = (\int_{1}^{+\infty} \frac{x^{t}}{t} dt)^{'}$

7. Pour n ≤ 2, on pose $g_n(x) = \int_{1}^{n} \frac{x^{t}}{t} dt$
   Montrer que g_n est indefiniment dérivable sur [0,1]

J'ai pas arrivé à résoudre la question.

8. Montrer que g_n converge uniformement sur [0,α], avec $\alpha \in [0,1[$

J'ai pas arrivé à résoudre la question.

Problème 2

I)- Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme.

A) - $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)^2}{n!}$ (on rappelle que : e = $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$)

On a $\lim_{+\infty} \frac{U_(n+1)}{U_n} = \lim_{+\infty} \frac{(n+2)^2}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)^2} = \lim_{+\infty} \frac{(n+2)^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{+\infty} \frac{(n+2)^2}{(n+1)^3} = 0 < 1$

Alors selon la règle d'Alembert cette série converge.

On a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)^2}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 5 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} + 3 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} + 1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 5 +$
$5 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \boxed{5(1+e)}$

B) - $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} cos(n\theta).\ \ \theta \in \mathrm{R}$

$\forall n > 0$ on a : $cos(n\theta) \leq 1 \implies \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} cos(n\theta) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$

et puisque la dernière converge (série géométrique avec q = $\frac{1}{2}$), selon la théorème de comparaison la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} cos(n\theta)$ converge aussi.

On pose S(x) = $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} cos(n\theta).x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{1}{2})^n cos(n\theta).x^{1.n+0}$

On a f(x) = $\sum_{n=0}^{+\infty} cos(n\theta)x^n = Re(\sum_{n=1}^{+\infty} e^{in\theta}.x^n = Re(\frac{1}{1-e^{i\theta}.x}) = \frac{1 - x\cos(\theta)}{1 - 2x\cos(\theta) + x^2}$

Donc

$$S(x) = x^0 f(\frac{1}{2}x^1)$$
$$S(x) = \frac{1 - \frac{1}{2}\cos(\theta)}{1 - xcos(\theta) + (\frac{1}{2}x)^2}$$

puisque S est continue en 1, donc: $S = S(1) = \boxed{\frac{1 - \frac{1}{2}\cos(\theta)}{1 - \cos(\theta) + \frac{1}{4}}}$

II)-

1. Déterminer le développement en série entière de la fonction $x \to log(1-x)$

On sait que D.S de $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$

On pose $\begin{cases} U = 1 - x \\ U' = -1 \end{cases} \Longrightarrow log'(1-x) = \frac{U'}{U}$

$$\int \frac{-1}{1-x} = log(1-x) + k$$
$$Donc \int \frac{1}{1-x} = -log(1-x) \ , \ \ k = 0$$
$$Or \ \ log(1-x) \ avec \ x = 0 \rightarrow -ln(1) = 0$$
$$Alors \ \ -log(1-x) = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt$$
$$or \ \ D.S.E \ \ de \ \ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \Longrightarrow \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int x^n dx$$
$$d'où \ \ -log(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int x^n dx \ , \ \int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$
$$-log(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$
$$\boxed{log(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}}$$

2. Soit la série entiére $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2-1}$:

   A- Déterminer son rayon de convergence R

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2-1}}{\frac{1}{n^2-1}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2-1}{n^2+2n}$$
$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{n^2+} . \frac{(1-\frac{1}{n^2})}{(1+\frac{2}{n})} = 1$$

Donc $\boxed{R = 1}$

B- Calculer sa somme S(x) pour $|x| < R$

$$S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2-1} \quad \forall -1 < x < 1$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2-1} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)(n+1)}$$

$$(xS)'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} = x\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -x.ln(1-x)$$

$$\int_0^x -t.ln(1-t)dt = \frac{1-x^2}{2}ln(1-x0) + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2}$$

$$\text{donc } \boxed{S(x) = \frac{1-x^2}{2x}ln(1-x) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2}}$$

C- Montrer que la série est uniformément convergente sur [-1,1], en déduire la somme de la série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1}$

la somme de la série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1} = S(1) = S(x) = \frac{1-1^2}{2.1}ln(1-1) + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{3}{4}}$